REVISION pour préparer l'entrée en TERMINALE SPE maths

Quelques jours avant la rentrée, l'équipe de mathématiques du lycée Rudloff, vous conseille vivement de revoir les notions ci-dessous pour débuter votre année dans les meilleures conditions.

THEME 1 : résoudre des équations

De la technique et de la réflexion : pour résoudre ces équations vous devez d'abord réfléchir au type d'équation :

Voici des liens vers des explications pour ceux qui voudraient revoir les méthode :

- premier degré : http://www.jaicompris.com/lycee/math/equation/equation-seconde.php
- second degré : http://www.jaicompris.com/lycee/math/equation/equation-general.php
- avec exp : ex 2 de http://www.jaicompris.com/lycee/math/fonction/exponentielle/exponentielle.php
  si vous ne vous souvenez plus bien des propriétés de exp, faire d'abord ex 1, 2, 3 de
  http://www.jaicompris.com/lycee/math/fonction/exponentielle/exponentielle-premiere.php
- avec inconnue au dénominateur : http://www.jaicompris.com/lycee/math/equation/equation-general.php

puis réfléchir aux méthodes liées à ce type d'équation.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-3(1-5x)-x(4x+2)+3x=5-4x^2$

C'est une équation du second degré. On commence par développer les 2 membres.

$$-3+15x-4x^2-2x+3x=5-4x^2$$

Puis annuler un membre

$$-8+16x=0$$

les termes en x^2 s'annulent, on obtient une équation du premier degré.

$$16x=8$$

$$x=\frac{1}{2}$$

La solution de l'équation est $\frac{1}{2}$

2. $\frac{2}{3}x^2-\frac{x}{6}-\frac{1}{12}=0$

   C'est une équation du second degré, le coefficient de x^2 est non nul.
   On peut poser $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$, $c=-\frac{1}{12}$
   OU en réfléchissant (un peu) on multiplie les 2 membres de l'équation par 12 pour obtenir comme équation équivalente :

$$8x^2-2x-1=0$$

   On pose $a=8, b=-2 , c=-1$
   Or $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times8\times(-1)=36$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{36}}{16} = -\frac{1}{4}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{36}}{16} = \frac{1}{2}$$

Les solutions sont $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$

3. $5x^2 + x = -4$

C'est une équation du second degré, le coefficient de x^2 est non nul. On annule le membre de droite

$$5x^2 + x + 4 = 0$$

On pose $a = 5, b = 1 , c = 4$

On calcule le discriminant du trinôme

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 5 \times 4 = -79$

Donc $\Delta < 0$ d'où l'équation n'a pas de solutions réelles

4. $3x^2 - 4x - 1 = 2x - 4$

C'est une équation du second degré, le coefficient de x^2 est non nul. On annule un membre :

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

On pose $a = 3, b = -6 \; et \; c = 3$

On calcule le discriminant du trinôme

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$

Donc $\Delta = 0$

Par conséquent l'équation a une solution réelle : $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2\times 3} = 1$

(ou on reconnait :

$$3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$$

Et $3(x-1)^2 = 0$ équivaut à $x = 1$)

5. $e^{x^2} = e$

C'est une équation contenant une exponentielle

On va utiliser la propriété

pour tout réel a, b : $e^a = e^b$ *équivaut* à $a = b$

Pour cela chaque membre doit être écrit sous forme d'une exponentielle

$e^{x^2} = e$ équivaut à $e^{x^2} = e^1$

ce qui équivaut à résoudre $x^2 = 1$

C'est une équation du second degré n'ayant pas de terme en x

$x^2 = 1$ équivaut à $x = -1 \; ou \; x = 1$

Les solutions sont $-1 \; et \; 1$

6. $e^{3x-1} = 1$

C'est une équation contenant une exponentielle

On va utiliser la propriété : pour tout réel a, b : $e^a = e^b$ $équivaut$ à $a = b$

Pour cela chaque membre doit être écrit sous forme d'une exponentielle
$e^{3x-1} = 1$ équivaut à $e^{3x-1} = e^0$
$ce\ qui\ équivaut$ à $résoudre\ \ 3x - 1 = 0$

C'est une équation du premier degré $3x - 1 = 0$ $équivaut$ à $3x = 1$ $équivaut$à $x = \frac{1}{3}$

La solution de l'équation est $\frac{1}{3}$

7. $5x^2 - 1 = 0$

C'est une équation du second degré, le coefficient de x^2 est non nul. Comme le coefficient de x est nul, il n'est pas nécessaire d'utiliser le discriminant, il suffit d'isoler x^2 :

$5x^2 - 1 = 0$ équivaut à $5x^2 = 1$
équivaut à résoudre $x^2 = \frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$ étant positif,
Les solutions sont $-\sqrt{\frac{1}{5}}$ et $\sqrt{\frac{1}{5}}$

8. $5x^2 - 3x = 0$
C'est une équation du second degré, le coefficient de x^2 est non nul. Comme le terme constant est nul, il n'est pas nécessaire d'utiliser le discriminant, il suffit de factoriser et de résoudre l'équation produit nul ainsi obtenue.
$5x^2 - 3x = 0$
équivaut à résoudre $x(5x - 3) = 0$
équivaut à $x = 0$ ou $5x - 3 = 0$
équivaut à $x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$
Les solutions sont 0 et $\frac{3}{5}$

9. $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$
C'est une équation produit nul
$e^x - e^2 = 0$ ou $e^{-x} + 5 = 0$
$e^x = e^2$ ou $e^{-x} = -5$
$x = 2$ ou pour tout réel X, e^Xest strictement positif, donc cette équation n'a pas de solution
La solution est 2

10. $xe^{5x} = 2x^2e^{5x}$

On annule un membre

$xe^{5x} - 2x^2e^{5x} = 0$

On factorise le membre de gauche

$xe^{5x}(1-2x) = 0$

On résout une équation produit nul

Or $e^{5x} \neq 0$ pour tout réel x

$x = 0$ ou $1 - 2x = 0$

$= 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

les solutions sont 0 et $\frac{1}{2}$

11. $e^{5x+1} - ee^{2x} = 0$

On ne peut factoriser le membre de gauche de manière intéressante

$e^{5x+1} - ee^{2x} = 0$

équivaut à $e^{5x+1} = ee^{2x}$

Or $ee^{2x} = e^{1+2x}$

Résoudre l'équation revient à résoudre

$e^{5x+1} = e^{1+2x}$

On utilise pour tout réel a, b

$e^a = e^b$ *équivaut* à $a = b$

$5x + 1 = 1 + 2x$

$3x = 0$

$x = 0$

La solution est 0

12. $\frac{-x^2+2x+8}{2x+4} = 0$

C'est une équation quotient

Elle équivaut à

$-x^2 + 2x + 8 = 0$ et $2x + 4 \neq 0$

$2x + 4 \neq 0$ équivaut à $2x \neq 4$ équivaut à $x \neq -2$

Pour résoudre $-x^2 + 2x + 8 = 0$

On pose $a = -1, b = 2$ *et* $c = 8$

On calcule le discriminant du trinôme

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{36}}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{36}}{-2} = -2$$

Les solutions sont -2 et 4

Or $x \neq -2$

Donc la solution de cette équation quotient est 4

Faites-vous un résumé de toutes les méthodes rencontrées dans cet exercice : en fonction du type d'équation connaissez la ou les méthode(s) pour résoudre une équation.

THEME 2 : le signe d'expression

De la technique et de la réflexion : pour déterminer le signe d'une expression, il faut d'abord réfléchir au type d'expression :

- premier degré : http://www.jaicompris.com/lycee/math/equation/equation-seconde.php
- second degré : http://www.jaicompris.com/lycee/math/equation/equation-general.php
- avec exp : ex 2 de http://www.jaicompris.com/lycee/math/fonction/exponentielle/exponentielle.php
- avec inconnue au dénominateur : http://www.jaicompris.com/lycee/math/equation/equation-general.php

puis réfléchir aux méthodes liées à cette recherche de signe

Déterminer le signe des expressions suivantes :

1. $5-4x$

C'est une expression du premier degré
Il y a deux manières de déterminer le signe de ces expressions :
Méthode 1 :
On résout l'inéquation suivante

$$5-4x \geq 0$$
$$5 \geq 4x$$
$$\frac{5}{4} \geq x$$

On résume ce que cette résolution nous apprend : $l'expression 5-4x$ est positive pour tout réel de $\left]-\infty\,;\frac{5}{4}\right]$. $5-4x$ s'annule pour x valant $\frac{5}{4}$.
On a également que $5-4x$ est strictement négatif pour x appartenant à $\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$.

Méthode 2 :

$5-4x$ est l'expression d'une fonction affine de taux de variation -4 qui est négatif donc la fonction est décroissante donc sa courbe est une droite qui « descend » donc la droite est d'abord au-dessus de l'axe des abscisses puis en dessous donc $5-4x$ est d'abord positive puis négative.

$De\ plus$ 5-4x s'annule pour x valant $\frac{5}{4}$.

2. $x^2-7x+10$

C'est une expression du second degré

On détermine le signe du discriminant Δ.
On pose $a=2 \quad ; b=-7 \quad c=10$
On calcule : $\Delta = b^2-4ac \ = (-7)^2-4\times 2\times 10 = \ -31$
Comme le discriminant est négatif, le trinôme n'a pas de racines et est du signe de a ; or a est positif donc $x^2-7x-10$ est strictement positif sur **R**.
(vérifiez la cohérence en traçant la parabole sur votre calculatrice)

3. $-6x^2 + x + 1$

Même méthode que dans la question 2. mais on obtient :
On pose $a = -6 \quad ; b = 1 \quad c = 1$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$
L'expression a deux racines et le trinôme est du signe de a c'est-à-dire négatif à l'extérieur des racines (et donc positif entre les racines). On peut faire un schéma de la situation pour se le rappeler puisque a est négatif, la parabole est tournée vers le bas et a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.
Pour déterminer les intervalles, on calcule les racines :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{-2\times(-6)} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{-2\times(-6)} = \frac{1}{3}$

On peut pour conclure dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $-6x^2+x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. $signe\ de\ 3 - 3e^{-5x}$

C'est une expression avec un exponentielle. Pour déterminer son signe on résout une inéquation et on utilise la propriété :
pour tout réel a, b : $a \leq b$ *équivaut à* $e^a \leq e^b$
On résout : $3 - 3e^{-5x} \geq 0$
On factorise par 3

$$3(1 - e^{-5x}) \geq 0$$

Comme 3 est positif, il suffit de résoudre

$$1 - e^{-5x} \geq 0$$
$$1 \geq e^{-5x}$$
$$e^0 \geq e^{-5x}$$

En utilisant la propriété citée

$$0 \geq -5x$$
$$0 \leq x$$

(on a divisé par -5 les deux membres)
Par conséquent $3 - 3e^{-5x}$ est positif pour x positif, s'annule pour x valant 0 et est négatif pour x négatif

4. $e^{x+2} - 1$
On utilise la même méthode que précédemment :
On résout $e^{x+2} - 1 \geq 0$

$$e^{x+2} \geq 1$$
$$e^{x+2} \geq e^0$$
$$x + 2 \geq 0$$
$$x \geq -2$$

D'où le tableau de signe

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $e^{x+2}-1$		$-$	0	$+$	

5.

$$x^2e^{-3x} - 5e^{-3x}$$

Cette expression est une somme, chaque terme est un produit dont un des facteurs est e^{-3x}. On ne pourra pas utiliser la même méthode que précédemment.

On factorise l'expression.

$$e^{-3x}(x^2 - 5)$$

Le premier facteur e^{-3x}étant une exponentielle est toujours strictement positive, donc le signe de l'expression est celle de $x^2 - 5$.

Le deuxième facteur est un trinôme du second degré où le coefficient de x est nul,

On détermine les racines de ce trinôme :

$$x^2 - 5 = 0 \text{ équivaut à } x^2 = 5 \text{ équivaut à}$$

$$x = \sqrt{5} \; ou \; x = -\sqrt{5}$$

Comme le coefficient de x^2vaut 1, il est positif donc l'expression est positive à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
signe de $x^2e^{-3x} - 5e^{-3x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Faites-vous un résumé de toutes les méthodes rencontrées dans cet exercice : en fonction du type d'expression connaissez la ou les méthode(s) pour déterminer le signe d'une expression.

THEME 3 : dérivation (exercices et corrections proposés par Lycée Portes de l'Oisans)

EXERCICE 3 **Savoir étudier une fonction où apparaît la fonction exponentielle.**

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5-x)e^x \qquad g(x) = (e^x+1)(e^x-3) \qquad h(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

Pour chacune de ces fonctions, on demande :

a) d'exprimer la dérivée en fonction de x.

b) d'étudier le signe de la dérivée sur $\mathbb{R}$.

c) de construire le tableau de variations de la fonction.

d) de vérifier le tableau de variations en traçant la courbe de la fonction sur la calculatrice.

CORRECTION (éléments de correction)

On rappelle la dérivée la fonction exp est la fonction exp : $exp' = exp$.

Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5-x)e^x$.

a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = 5 - x \text{ et } u'(x) = -1 \\ \mathrm{v}(x) = e^x \text{ et } \mathrm{v}'(x) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $f'(x) = -1e^x + (5-x)e^x = e^x(1+5-x) = \boldsymbol{e^x(4-x)}$.

b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{4-x}$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	e^4	↘	

$f(4) = (5-4)e^4 = e^4$.

Etude de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (e^x+1)(e^x-3)$.

a) $g = u \times v$ donc $g' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x + 1 \text{ et } u'(x) = e^x \\ \mathrm{v}(x) = e^x - 3 \text{ et } \mathrm{v}'(x) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $g'(x) = e^x(e^x-3) + (e^x+1)e^x = e^x(e^x - 3 + e^x + 1) = \boldsymbol{2e^x(e^x-1)}$.

b) Pour tout réel x, $2e^x > 0$ donc $\boldsymbol{g'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{e^x - 1}$.

Pour tout réel x, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction g est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

$g(0) = (e^0+1)(e^0-3) = -4$

Etude de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x-2}{e^x}$.

a) $h = \frac{u}{v}$ donc $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 2 \text{ et } u'(x) = 1 \\ \mathrm{v}(x) = e^x \text{ et } \mathrm{v}'(x) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{h'(x)} = \frac{\boldsymbol{1e^x - (x-2)e^x}}{\boldsymbol{(e^x)^2}} = \frac{e^x(1-(x-2))}{e^{2x}} = e^{-x}(3-x)$.

b) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $\boldsymbol{h'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{3-x}$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction h est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	
variation de h		↗	e^{-3}	↘	

$h(3) = \frac{3-2}{e^3} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}$.

EXERCICE 4 **Savoir dériver une fonction et étudier ses variations**

Dans chacun des cas ci-dessous, où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer la fonction dérivée de f et établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7$ **2.** $f(x) = (x^2+1)(6x^2-10)$ **3.** $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+1}$

CORRECTION (éléments de correction)ex 4

METHODE : **Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.**

1. $\boldsymbol{f}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7}$

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 4x + 5}$
- $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times 5 = -104$

  $\Delta < 0$, donc $f'(x)$ n'admet pas de racine réelle et est du signe de 6 (coefficient de x^2) sur $\mathbb{R}$.

  Finalement, $\boldsymbol{f'(x)}$ **est strictement positif sur** $\mathbb{R}$ et donc $\boldsymbol{f}$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

2. $\boldsymbol{f}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $\boldsymbol{f(x) = (x^2+1)(6x^2-10)}$

- $f(x) = u(x)v(x)$ donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+1 & \text{et} \quad u'(x) = 2x \\ v(x) = 6x^2 - 10 & \text{et} \quad v'(x) = 12x \end{cases}$

  Ainsi, pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)} = 2x(6x^2 - 10) + (x^2+1)12x = 24x^3 - 8x = \boldsymbol{8x(3x^2 - 1)}$

  $= \boldsymbol{8x(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)}$

- **Tableau de variation de** $\boldsymbol{f}$ **sur** $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
signe de $8x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $3x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		↘	$-\frac{32}{3}$	↗	-10	↘	$-\frac{32}{3}$	↗	

$3x^2 - 1$ est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$3x^2 - 1$ est donc du signe de 3 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}+1\right)\left(6\times\frac{1}{3} - 10\right) = \frac{4}{3}\times(-8) = -\frac{32}{3} \quad \text{et} \quad f(0) = 1\times(-10) = -10$$

3. $\boldsymbol{f}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+1}}$

- $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x+1 & \text{et} \quad u'(x) = 4 \\ v(x) = 2x^2+1 & \text{et} \quad v'(x) = 4x \end{cases}$

  Par suite, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4(2x^2+1) - (4x+1)4x}{(2x^2+1)^2} = \boldsymbol{\dfrac{-8x^2 - 4x + 4}{(2x^2+1)^2}}$

- **Pour tout réel** $\boldsymbol{x}$**,** $\boldsymbol{(2x^2+1)^2 > 0}$ **et donc** $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{-8x^2 - 4x + 4}$**.**

  Or, $-8x^2 - 4x + 4$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4\times(-8)\times 4 = 144$

  $\Delta > 0$, donc $-8x^2 - 4x + 4$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{144}}{2\times(-8)} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{144}}{2\times(-8)} = -1$

  $-8x^2 - 4x + 4$ est donc du signe de -8 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines -1 et $\frac{1}{2}$.

  Tableau de variation de $\boldsymbol{f}$ **sur** $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f		↘	-1	↗	2	↘	

Faites-vous un résumé des étapes pour étudier les variations d'une fonction

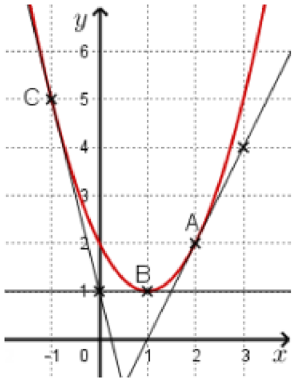
EXERCICE 5 **Savoir déterminer une équation de la tangente à une courbe**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et C_f sa courbe représentative

a) Déterminer, à la main une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

b) Vérifier votre résultat en traçant, sur votre calculatrice, la tangente T et la courbe C_f.

EXERCICE 6 **Savoir lire un nombre dérivée et déterminer une équation de la tangente à une courbe (bis)**



On donne, ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que ses tangentes T_A, T_B et T_C aux points A, B et C d'abscisses respectives 2, 1 et -1.

1. Déterminer graphiquement :

a) $f(2)$, $f(1)$ et $f(-1)$. **b)** $f'(2)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$.

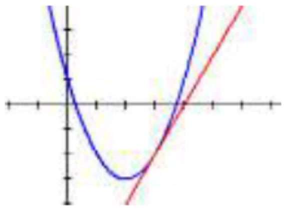
2. En déduire une équation de chacune des tangentes T_A, T_B et T_C.

CORRECTION (éléments de correction) ex 5

a) Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3 est : $\boxed{y = f'(3)(x-3) + f(3)}$

Or, $f(3) = -2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(3) = 2$.

Par suite, une équation de la tangente est : $y = 2(x-3) - 2$ soit $\boldsymbol{y = 2x - 8}$



b) **A la calculatrice,** comme l'atteste le document ci-contre, il semble bien que la droite T soit tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

CORRECTION (éléments de correction) ex 6

1. a) $f(2) = 2$, $f(1) = 1$ et $f(-1) = 5$

b) **Lorsque f est dérivable en x, $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f de f au point d'abscisse x :** $f'(2) = 2$, $f'(1) = 0$ et $f'(-1) = -4$.

2. $T_A : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $\boldsymbol{T_A : y = 2x - 2}$

$T_B : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $\boldsymbol{T_B : y = 1}$

$T_C : y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$ soit $\boldsymbol{T_C : y = -4x + 1}$

Vidéo pour revoir la notion de tangente à une courbe : https://www.youtube.com/watch?v=MNPwqV5n4Ck

Faites-vous un bilan de

-comment déterminer une équation de tangente

-que signifie et comment lire graphiquement $f(a)$ et $f'(a)$

THEME 4 : suite (exercices 7,8,9 et corrections proposés par Lycée Portes de l'Oisans)

EXERCICE 7 **Savoir calculer les premiers termes d'une suite.**

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n - 2$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \end{cases}$.

1. Pour chacune de ces suites, calculer les quatre premiers termes.
2. On donne ci-dessous, le script Python d'une fonction permettant de calculer le terme de rang n de chacune de ces suites. Compléter cet algorithme :

```
>>> def u(n):
        u = ...

        return u
```

```
>>> def v(n):
        v = ...
        for i in range(1,n+1):
            v = ...

        return v
```

CORRECTION (éléments de correction) ex 7

1. **La suite (u_n) est définie par son terme général.** Pour calculer le terme d'indice n de la suite, il suffit donc de remplacer n par sa valeur dans l'expression donnée :
   $u_0 = 3 \times 0 - 2 = \mathbf{-2}$ $\quad$ $u_1 = 3 \times 1 - 2 = \mathbf{1}$
   $u_2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$ $\quad$ $u_3 = 3 \times 3 - 2 = \mathbf{7}$
   La suite (v_n) est définie par récurrence. Chaque terme d'indice $n \geq 1$ de la suite est exprimé en fonction du terme précédent :
   $v_0 = \mathbf{2}$ $\quad$ $v_1 = 3 \times v_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$
   $v_2 = 3 \times v_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = \mathbf{10}$ $\quad$ $v_3 = 3 \times v_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = \mathbf{28}$.
2. Pour calculer un terme de la suite (u_n), il suffit d'utiliser une fois l'expression de la suite donnant le terme général de celle-ci. Pour calculer le terme d'indice n de la suite (v_n), il faut utiliser n fois la formule de récurrence définissant la suite.

```
>>> def u(n) :
        u = 3*n-2
        return u
```

```
>>> def v(n) :
        v = 2
        for i in range(1, n+1):
            v = 3*v-2

        return v
```

EXERCICE 8 **Etude d'une suite arithmétique.**

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1[er] terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

2. Calculer u_{50}.

3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{50} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

EXERCICE 9 **Etude d'une suite géométrique.**

Soit (u_n) la suite géométrique de 1[er] terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

2. Calculer u_9.

3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

CORRECTION (éléments de correction) ex 8

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = \mathbf{8 + 3n}$.

2. Par suite, $u_{50} = 8 + 3 \times 50 = \mathbf{158}$

3.
$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^{50} u_k &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{50} \\ &= u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 3 \times 2) + \dots + (u_0 + 3 \times 50) \\ &= 51u_0 + 3(1 + 2 + \dots + 50) \\ &= 51 \times 8 + 3\frac{50 \times 51}{2} \\ &= \mathbf{4\,233} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique peut aussi être déterminée par la formule :

$$\boxed{\textit{Nombre de termes de la somme} \times \frac{\textit{1er terme de la somme} + \textit{dernier terme de la somme}}{2}}$$

Soit ici, $S = 51 \times \frac{8 + 158}{2} = \mathbf{4\,233}$

CORRECTION (éléments de correction) ex 9

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = \mathbf{3 \times 2^n}$.

2. Par suite, $u_9 = 3 \times 2^9 = \mathbf{1\,536}$

3.
$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^{9} u_k &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9 \\ &= u_0 + (u_0 \times 2) + (u_0 \times 2^2) + \dots + (u_0 \times 2^9) \\ &= u_0(1 + 2 + 2^2 \dots + 2^9) \\ &= 3\frac{1 - 2^{9+1}}{1 - 2} \\ &= 3 \times (2^{10} - 1) \\ &= \mathbf{3\,069} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ peut aussi être déterminée par la formule : $\boxed{\textit{1}^{\textit{er}}\textit{ terme de la somme} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes de la somme}}}{1 - \textit{raison}}}$

Soit ici, $S = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \mathbf{3\,069}$

Exercice 10 :

Déterminer les variations des suites suivantes définies pour tout entier naturel n :

1. $u_n = 3 - 2n$
2. $v_n = n^2 - 5n$
3. $r_n = -3 \times 5^n$

3. $w_n = \frac{3}{n-5}$ pour n entier naturel strictement supérieur à 5.

4. $r_{n+1} = r_n - 2n + 14$

CORRECTION (éléments de correction) ex 10

> **Pour déterminer les variations d'une suite on compare u_n et u_{n+1} pour tout entier n**
> **Pour cela on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier n**

1. On exprime d'abord u_{n+1} $en\ fonction\ de$ n
   On a $u_{n+1} = 3 - 2(n+1) = 3 - 2n - 2 = 1 - 2n$
   Pour tout entier $n, on\ a\ u_{n+1} - u_n = 1 - 2n - (3 - 2n) = 1 - 2n - 3 + 2n = -2$
   Donc pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ est négatif (puisque $-2\ est\ négatif$)
   Ce qui signifie que $pour\ tout\ entier\ n\ , u_{n+1} < u_n$
   La suite est donc strictement décroissante sur N.

2. On exprime d'abord v_{n+1} $en\ fonction\ de$ n
   On a $v_{n+1} = (n+1)^2 - 5(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 = n^2 - 3n - 4$
   Pour tout entier $n, on\ a\ v_{n+1} - v_n = n^2 - 3n - 4 - (n^2 - 5n) = 2n - 4$
   On détermine maintenant le signe de $v_{n+1} - v_n$ et pour cela on détermine le signe de $2n - 4$
   Or $2n - 4 \geq 0$ $équivaut$ à $n \geq 2$ donc $2n - 4$ est positif pour tout entier supérieur à 2
   Ce qui signifie que $pour\ tout\ entier\ n\ \ supérieur$ à $2, v_n \leq v_{n+1}$
   La suite est donc croissante à partir du rang 2

3. On exprime d'abord u_{n+1} $en\ fonction\ de$ n
   On a $r_{n+1} = -3 \times 5^{n+1}$
   Pour tout entier $n, on\ a\ r_{n+1} - r_n = -3 \times 5^{n+1} - (-3 \times 5^n) = -3 \times 5^{n+1} + 3 \times 5^n$
   Pour déterminer le signe de cette différence, on factorise l'expression par 3×5^n
   On rappelle que $5^{n+1} = 5^n \times 5^1 = 5^n \times 5$
   Pour tout entier $n,\ r_{n+1} - r_n = -3 \times 5^n \times 5 + 3 \times 5^n \times 1 = 3 \times 5^n(-5+1) = -4 \times 3 \times 5^n = -12 \times 5^n$
   Donc pour tout entier n, $r_{n+1} - r_n$ est négatif
   (puisque $-12\ est\ négatif\ et\ que\ 5^n\ est\ une\ puissance\ d'un\ positif\ donc\ positive)$)
   Ce qui signifie que $pour\ tout\ entier\ n\ , u_{n+1} \leq u_n$
   La suite est donc décroissante sur N.
   REMARQUE : Pour ceux qui ne sont pas à l'
   http://www.jaicompris.com/lycee/math/calcul/puissance.php

4. On exprime d'abord w_{n+1} $en\ fonction\ de$ n
   On a $w_{n+1} = \frac{3}{n+1-5} = \frac{3}{n-4}$
   Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 5 , $on\ a$
   $w_{n+1} - w_n = \frac{3}{n-4} - \frac{3}{n-5} = \frac{3(n-5)}{(n-4)(n-5)} - \frac{3(n-4)}{(n-5)(n-4)} = \frac{3(n-5)-3(n-4)}{(n-4)(n-5)} = \frac{3n-15-3n+12}{(n-4)(n-5)} = \frac{-3}{(n-4)(n-5)}$
   On étudie le signe de ce quotient :
   -le numérateur est négatif
   -le dénominateur est un trinôme du second degré sous forme factorisée dont les racines sont 4 et 5. Le coefficient de n^2 est 1 (si on développe l'expression on obtiendra le terme n^2)ce coeffcient est positif donc le trinôme sera du signe positif à l'extérieur des racines. (on peut toujours imaginer la parabole « qui sourit » et est donc d'abord situé au-dessus puis en dessous puis à nouveau au-dessus de l'axe des abscisses)
   D'où pour x réel

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
signe de $(x-4)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe du quotient		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Par conclusion pour tout entier naturel n strictement supérieur à 5 , on a $w_{n+1} - w_n$ est strictement négatif
Ainsi pour tout entier naturel n strictement supérieur à 5, $w_{n+1} < w_n$ donc la suite (w_n) est strictement décroissante à partir du rang 5.

REMARQUE : le tableau de signe n'était pas nécessaire puisque dans l'énoncé la suite était définie pour tout entier supérieur à 5. Aussi comme $n \geq 5$ on a $n - 5 \geq 0$ et comme $n \geq 5$, on a également $n \geq 4$ d'où $n - 4 \geq 0$. Les deux expressions étant positive on obtient donc que pour $n \geq 5$, le produit $(n-4)(n-5)$est positif donc le quotient $\frac{-3}{(n-4)(n-5)}$ est négatif

5. $r_{n+1} = r_n - 2n + 14$

   Cette suite (r_n)est une suite définie par récurrence, exprimer r_{n+1} en fonction de n ne sera pas possible ici. En terminale vous verrez d'autres méthodes. Dans ce cas particulier, on peut à partir de l'expression directement exprimer la différence $r_{n+1} - r_n$.
   Comme pour tout entier n, $r_{n+1} = r_n - 2n + 14$, on en déduit que $r_{n+1} - r_n = -2n + 14$
   Ainsi il suffit de déterminer le signe de $-2n + 14$. Or c'est une expression du premier degré (voir différentes méthodes dans l'exercice 2.
   On résout $-2n + 14 \geq 0$ équivaut à $14 \geq 2n$ équivaut à $7 \geq n$
   Donc pour tout entier naturel n supérieur à 7, $-2n + 14$ est positif donc $r_{n+1} - r_n$ est positif
   Ainsi pour tout entier naturel n supérieur à 7, $r_{n+1} \geq r_n$
   A partir du rang 7, (r_n)est une suite croissante.

Pour déterminer les variations d'une suite, la méthode a été rappelé en début d'exercice mais il y a différents cas possibles, faites vous un bilan des différentes situations rencontrées

Exercice 11: savoir démontrer qu'une suite est arithmétique

Démontrer que les suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n, sont arithmétiques

1. $u_n = -3n + 1$
2. $u_{n+1} = \frac{1}{2} + u_n$
3. $u_n = \frac{2-3n}{5}$

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on revient à la définition : il suffit de démontrer que pour tout entier n, un terme s'obtient à partir du précédent en ajoutant une constante, ce qui revient à démontrer que $u_{n+1} - u_n$ est une constante (c'est-à-dire ne dépend pas de n.
Lorsque vous ne savez pas si la suite est arithmétique, géométrique vous pouvez commencer par le conjecturer en calculant les premiers termes : ATTENTION ce n'est pas une démonstration

CORRECTION (éléments de correction) ex 11

1. On exprime d'abord $\boldsymbol{u_{n+1}}$ **: comme** $u_n = -3n+1$, $u_{n+1} = -3(n+1)+1 = -3n-3+1 = -3n-2$
   On exprime maintenant $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ **:**
   $\boldsymbol{pour\ tout\ entier\ naturel\ n,\quad u_{n+1} - u_n = -3n-2 - (-3n+1) = -3n-2+3n-1 = -3}$
   D'où la différence entre deux termes quelconques de la suite est une constante valant -3
   Donc la suite est arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 1$
   ATTENTION : une erreur classique est d'oublier les parenthèses quand on soustrait u_n

2. Cette suite (u_n)est une suite définie par récurrence, exprimer u_{n+1} en fonction de n ne sera pas possible à ce moment là. Dans ce cas particulier, on peut à partir de l'expression donnée puis directement exprimer la différence $u_{n+1} - u_n$ OU tout simplement utiliser la définition d'une suite arithmétique
   Comme pour tout entier $n, u_{n+1} = \frac{1}{2} + u_n$
   On peut en déduire que la suite est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$. (le premier terme n'avait pas été donné dans l'énoncé)

3. On exprime d'abord $\boldsymbol{u_{n+1}}$ **: comme** $u_n = \frac{2-3n}{5}$, $u_{n+1} = \frac{2-3(n+1)}{5} = \frac{2-3n-3}{5} = \frac{-1-3n}{5}$
   On exprime maintenant $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ **:**
   $\boldsymbol{pour\ tout\ entier\ naturel\ n,\quad u_{n+1} - u_n} = \frac{-1-3n}{5} - \frac{2-3n}{5} = \frac{-1-3n-(2-3n)}{5} = \frac{-1-3n-2+3n}{5} = \frac{-3}{5}$
   D'où la différence entre deux termes quelconques de la suite est une constante valant $-\frac{3}{5}$
   Donc la suite est arithmétique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme $u_0 = \frac{2}{5}$
   ATTENTION : une erreur classique est d'oublier les parenthèses quand on soustrait le numérateur de la 2è fraction

Exercice 12 : savoir démontrer qu'une suite est géométrique

Démontrer que les suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n, sont géométriques

1. $u_n = -3 \times 2^n$
2. $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}$ et $u_0 = -1$
3. $v_{n+1} = 0{,}95 v_n + 12 \ \ et\ v_0 = 300 \ \ ; u_n = v_n - 240$

CORRECTION (éléments de correction) ex 12

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on revient à la définition : il suffit de démontrer que pour tout entier n, un terme u_{n+1} s'obtient à partir du précédent u_n en multipliant par une constante le terme u_n, ce qui revient à démontrer que $constante \times u_n = u_{n+1}$

Pour **démontrer une égalité**, on peut (le plus souvent en terminale et première)

- partir d'un des membres, modifier son écriture pour démontrer qu'on obtient bien l'autre membre
- OU modifier l'écriture des 2 membres (attention de manière séparée) et démontrer qu'ils sont égaux à une 3è expression.
- OU effectuer la différence des deux membres et démontrer qu'elle est égale à 0.

1. Comme $u_n = -3 \times 2^n$, on a $u_{n+1} = -3 \times 2^{n+1}$

Or $2^{n+1} = 2^n \times 2^1 = 2^n \times 2$

Ainsi en partant du membre de gauche :
Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1}} = -3 \times 2^{n+1} = -3 \times 2^n \times 2 = \boldsymbol{u_n \times 2}$
On a démontré que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times 2}$ et 2 est bien une constante

Par conséquent (u_n) est une suite géormatrique de raison 2 et premier terme $u_0 = -3$

2. $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}$ et $u_0 = -1$
Cette suite (u_n)est une suite définie par récurrence.
Il s'agit de démontrer que $u_{n+1} = constante \times u_n$
Comme pour tout entier $n, u_{n+1} = \frac{u_n}{4} = \frac{1}{4}u_n$ et $\frac{1}{4}$ est bien une constante
D'après la définition d'une suite géométrique (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

3. $v_{n+1} = 0{,}95v_n + 12$ et $v_0 = 300$; $u_n = v_n - 240$
Cette suite (u_n)est une suite définie à l'aide d'une suite (v_n) qui est définie par récurrence.
Il s'agit de démontrer que $u_{n+1} = constante \times u_n$
Exprimons d'abord u_{n+1}
Or $u_{n+1} = v_{n+1} - 240 = 0{,}95\ v_n + 12 - 240 = 0{,}95\ v_n - 228$
Ne connaissons pas la constante, on ne peut écrire le membre de droite (sauf si on le conjecture en calculant les premiers termes)
Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit d'obtenir $constante \times u_n$ c'est-à-dire $constante \times (v_n - 240)$
L'idée est alors de factoriser par 0,95
Or $0{,}95\ v_n - 228 = 0{,}95\left(v_n - \frac{228}{0{,}95}\right) = 0{,}95(v_n - 240) = 0{,}95u_n$

On a démontré que pour tout entier $n, u_{n+1} = 0{,}95\ u_n$
Par conséquent la suite (u_n)est géométrique de raison 0,95 et de premier terme $u_0 = 300 - 240 = 60$