TG - Rallye Mathématique d'Alsace 2024 - Terminales - 20 mars 2024

Exercice 2

On effectue la somme

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots+\frac{n}{10^n}+\cdots$$

et on écrit ce nombre dans le système décimal. On obtient ainsi un certain nombre.
Dans ce nombre, quel est le $2024^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule obtenu ?

Soit $x=\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots+\frac{n}{10^n}+\cdots$ ce nombre.

Alors $10^{10}\times x = 1\times 10^9+2\times 10^8+3\times 10^7+4\times 10^6+\cdots+9\times 10+10+\frac{11}{10}+\frac{12}{100}+\frac{13}{1000}+\cdots$

D'où $10^{10}x = 1234567890+10+\frac{10}{10}+\frac{1}{10}+\frac{10}{100}+\frac{2}{100}+\frac{10}{1000}+\frac{3}{1000}+\cdots$

Soit $10^{10}x = 1234567900+\left(\frac{10}{10}+\frac{10}{100}+\frac{10}{1000}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots\right)$

Puis $10^{10}x = 1234567900+\left(1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdots\right)+x$

Avec $1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}$ avec $0<q=\frac{1}{10}<1$, on obtient :

$10^{10}x = 1234567900+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10}}+x$

soit $9\times 10^{10}x = 9\times 1234567900+9\times\frac{10}{9}+9\times x$

donc $9\times 10^{10}x-9x = 9\times 1234567900+10$

$9\times 9999999999x = 11\ 111\ 111\ 110$ soit $x=\dfrac{11\ 111\ 111\ 110}{9\times 9\times 1111111111}$ et enfin $\boxed{x=\dfrac{10}{81}.}$

Or en posant la division,

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
\boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & & & & & & & & & & 81 \\
- & 8 & 1 & & & & & & & & & & \overline{0,\boxed{1}\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ 0\ \boxed{1}} \\
 & 1 & 9 & 0 & & & & & & & & & \\
- & 1 & 6 & 2 & & & & & & & & & \\
 & & 2 & 8 & 0 & & & & & & & & \\
 & - & 2 & 4 & 3 & & & & & & & & \\
 & & & 3 & 7 & 0 & & & & & & & \\
 & & - & 3 & 2 & 4 & & & & & & & \\
 & & & & 4 & 6 & 0 & & & & & & \\
 & & & - & 4 & 0 & 5 & & & & & & \\
 & & & & & 5 & 5 & 0 & & & & & \\
 & & & & - & 4 & 8 & 6 & & & & & \\
 & & & & & & 6 & 4 & 0 & & & & \\
 & & & & & - & 5 & 6 & 7 & & & & \\
 & & & & & & & 7 & 3 & 0 & & & \\
 & & & & & & - & 7 & 2 & 9 & & & \\
 & & & & & & & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & &
\end{array}$$

on retombe sur le même dividende ...

Le développement décimal va donc être périodique de période 9.

Il suffit de diviser 2024 par 9 pour savoir quelle sera la $2024^{\text{ème}}$ décimale.

Or $2024 = 9\times 224+\boxed{8}$.

Donc on aura 224 fois « 123456790 » puis (comptons jusqu'à huit) : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et $\boxed{9}$!

Le $2024^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule est un 9.